

II. PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

1. Phương pháp đổi biến số

Định lý 1: Nếu $\int f(u)du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C$$

Hệ quả: Nếu $u = ax + b (a \neq 0)$ thì ta có $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$

Bài tập : Tính nguyên hàm

a. $\int (x+2)^9 dx$ b. $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$ c. $\int \frac{4}{(3x+1)^5} dx$ d. $\int \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) dx$
e. $\int \sqrt{2x+3} dx$ f. $\int \cos x \cdot \sin^2 x dx$ h. $\int e^{3-2x} dx$ k. $\int \frac{\ln x}{x} dx$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$

A. $\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$. B. $\int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \cos 2x + C$.
C. $\int \sin 2x dx = \cos 2x + C$. D. $\int \sin 2x dx = -\cos 2x + C$.

Câu 2. Một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ là:

A. $\frac{1}{2} \ln|x+1|$ B. $2 \ln(x^2+1)$ C. $\frac{1}{2} \ln(x^2+1)$ D. $\ln(x^2+1)$

Câu 3. Họ nguyên hàm của $\int e^x(1+e^{-x})dx$ là:

A. $e^x - x + C$. B. $e^x + x + C$. C. $e^{-x} + x + C$. D. $e^{-x} - x + C$.

Câu 4. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+1}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C$. B. $\int f(x) dx = \frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C$
C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x+1} + C$. D. $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C$.

Câu 5. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x^2}{x^3+4}$ là:

A. $3 \ln|x^3+4| + C$ B. $-3 \ln|x^3+4| + C$
C. $\ln|x^3+4| + C$ D. $-\ln|x^3+4| + C$

Câu 6. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x - 3}$ là:

A. $-\ln|\cos x - 3| + C$ B. $2 \ln|\cos x - 3| + C$
C. $-\frac{\ln|\cos x - 3|}{2} + C$ D. $4 \ln|\cos x - 3| + C$

Câu 7. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln 2x}{x}$ là:

A. $\ln 2x + C$ B. $\ln^2 x + C$. C. $\frac{\ln^2 2x}{2} + C$ D. $\frac{\ln x}{2} + C$.

Câu 8. Hàm số $F(x)$ nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x+1}$?

A. $F(x) = \frac{3}{8}(x+1)^{\frac{4}{3}} + C$

B. $F(x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{(x+1)^4} + C$

C. $F(x) = \frac{3}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1} + C$

D. $F(x) = \frac{3}{4}\sqrt[4]{(x+1)^3} + C$

Câu 9. Tìm hàm số $F(x)$ biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ và $F(1) = 1$.

A. $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

B. $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{1}{3}$

C. $F(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}2} + \frac{1}{2}$

D. $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{5}{3}$

Câu 10. Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{1+e^x}$.

A. $I = x - \ln|1 - e^x| + C$

B. $I = x + \ln|1 + e^x| + C$

C. $I = -x - \ln|1 + e^x| + C$

D. $I = x - \ln|1 + e^x| + C$

Câu 11. Tính $\int x.e^{x^2+1} dx$

A. $e^{x^2+1} + C$

B. $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$

C. $\frac{1}{2}e^{x^2+1} + C$

D. $\frac{1}{2}e^{x^2-1} + C$

Câu 12. Tính $\int x(x+1)^3 dx$ là:

A. $\frac{(x+1)^5}{5} + \frac{(x+1)^4}{4} + C$

B. $\frac{(x+1)^5}{5} - \frac{(x+1)^4}{4} + C$

C. $\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} + C$

D. $\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} + C$

Câu 13. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{e^{4x-2}}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2}e^{2x-1} + C$

B. $\int f(x) dx = e^{2x-1} + C$

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{2}e^{4x-2} + C$

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{e^{2x-1}} + C$

Câu 14. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$ và $F(0) = \pi$. Tính

$F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$

B. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

C. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \pi$

D. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \pi$

Câu 15. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$.

A. $\int f(x) dx = -\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C$

B. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3}\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C$

C. $\int f(x) dx = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C$

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{3}\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C$

2. Phương pháp nguyên hàm từng phần

Định lý 2: Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Hay

$$\int u dv = uv - \int v du$$

CÁC DẠNG TOÁN DÙNG PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Dạng 1: $\int f(x)\sin g(x)dx$ Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \sin g(x)dx \end{cases}$

Dạng 2: $\int f(x)e^{g(x)}dx$ Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = e^{g(x)}dx \end{cases}$

Dạng 3: $\int f(x)\ln g(x)dx$ Đặt $\begin{cases} u = \ln g(x) \\ dv = f(x)dx \end{cases}$

Dạng 4: $\int e^{f(x)}\sin g(x)dx$ Đặt $\begin{cases} u = e^{f(x)} \\ dv = \sin g(x)dx \end{cases}$

DẠNG 1.

Câu 1. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \sin x$ là:

A. $F(x) = -x \cos x - \sin x + C.$

B. $F(x) = x \cos x - \sin x + C.$

C. $F(x) = -x \cos x + \sin x + C.$

D. $F(x) = x \cos x + \sin x + C.$

Câu 2. Tìm $\int x \sin 2x dx$ ta thu được kết quả nào sau đây?

A. $x \sin x + \cos x + C$

B. $\frac{1}{4}x \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + C$

C. $x \sin x + \cos x$

D. $\frac{1}{4}x \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x$

Câu 3. Tìm nguyên hàm $I = \int (x-1) \sin 2x dx$

A. $I = \frac{(1-2x)\cos 2x + \sin 2x}{2} + C.$

B. $I = \frac{(2-2x)\cos 2x + \sin 2x}{2} + C.$

C. $I = \frac{(1-2x)\cos 2x + \sin 2x}{4} + C.$

D. $I = \frac{(2-2x)\cos 2x + \sin 2x}{4} + C.$

Câu 4. Một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ là:

A. $x \tan x - \ln |\cos x|$

B. $x \tan x + \ln (\cos x)$

C. $x \tan x + \ln |\cos x|$

D. $x \tan x - \ln |\sin x|$

Câu 5. Một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$ là:

A. $x \cot x - \ln |\sin x|$

B. $-x \cot x + \ln (\sin x)$

C. $-x \tan x + \ln |\cos x|$

D. $x \tan x - \ln |\sin x|$

Câu 6. Nguyên hàm của $I = \int x \sin^2 x dx$ là:

A. $\frac{1}{8}(2x^2 - x \sin 2x - \cos 2x) + C.$

B. $\frac{1}{8} \cos 2x + \frac{1}{4}(x^2 + x \sin 2x) + C.$

C. $\frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{2} \cos 2x - x \sin 2x\right) + C.$

D. Đáp án A và C đúng.

DẠNG 2.**Câu 7.** Họ nguyên hàm của $\int e^x(1+x)dx$ là:

A. $I = e^x + xe^x + C.$

B. $I = e^x + \frac{1}{2}xe^x + C.$

C. $I = \frac{1}{2}e^x + xe^x + C.$

D. $I = 2e^x + xe^x + C.$

Câu 8. Tìm nguyên hàm $I = \int (2x-1)e^{-x}dx.$

A. $I = -(2x+1)e^{-x} + C.$

B. $I = -(2x-1)e^{-x} + C.$

C. $I = -(2x+3)e^{-x} + C.$

D. $I = -(2x-3)e^{-x} + C.$

Câu 9. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+1)e^x$ và $F(0) = 3$. Tính $F(1)$.

A. $F(1) = 11e - 3.$

B. $F(1) = e + 3.$

C. $F(1) = e + 7.$

D. $F(1) = e + 2$

DẠNG 3.**Câu 10.** Kết quả của $\int \ln x dx$ là:

A. $x \ln x + x + C$

B. Đáp án khác

C. $x \ln x + C$

D. $x \ln x - x + C$

Câu 11. Nguyên hàm của $I = \int x \ln x dx$ bằng với:

A. $\frac{x^2}{2} \ln x - \int x dx + C.$

B. $\frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{2} x dx + C.$

C. $x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x dx + C.$

D. $x^2 \ln x - \int x dx + C.$

Câu 12. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \ln(x+2)$.

A. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2+4x}{4} + C$

B. $\int f(x) dx = \frac{x^2-4}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2-4x}{4} + C$

C. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2+4x}{2} + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{x^2-4}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2+4x}{2} + C$

DẠNG 4:**Câu 13.** Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int e^x \sin x dx = e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$

B. $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$

C. $\int e^x \sin x dx = e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$

D. $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$

Câu 14. Tìm $J = \int e^x \cdot \sin x dx$?

A. $J = \frac{e^x}{2} (\cos x - \sin x) + C.$

B. $J = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C.$

C. $J = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C.$

D. $J = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x + 1) + C.$

Câu 15. Tính $\int e^x \cos x dx$.

A. $H = \frac{1}{2} (e^x \sin x + e^x \cos x) + C$

B. $H = \frac{e^x}{2} (\cos x - \sin x) + C$

C. $H = \frac{e^x}{2} (-\sin x - \cos x) + C.$

D. $H = \frac{e^x}{2} + C$